

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Физический факультет
кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка
по общему физическому практикуму

Лаб. работа № 201

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА
ИЗ ИЗГИБА РАВНОПРОЧНОЙ БАЛКИ

Работу поставил доцент Пустовалов Г.Е.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА ИЗ ИЗГИБА РАВНОПРОЧНОЙ БАЛКИ

1. Деформации.

Деформациями называются изменения положений точек твердых тел относительно друг друга под действием приложенных к этим телам внешних сил. Деформации бывают *простые* и *сложные*. К простым деформациям относятся *растяжение* (одностороннее сжатие можно считать отрицательным растяжением) и *сдвиг*. К сложным деформациям относятся, например, *изгиб* и *кручение*. Все не слишком большие деформации можно представить в виде комбинации простых. В частности, кручение - это сложный сдвиг круговых сечений в цилиндрическом теле, изгиб - растяжение одних и сжатие других слоев тела.

До определенных пределов деформации подчиняются *закону Гука* - они *пропорциональны приложенным к телу силам*. При очень больших деформациях пропорциональность между деформациями и внешними силами нарушается. Величина деформации, при превышении которой начинаются отступления от закона Гука, определяется видом деформации, свойствами вещества, из которого изготовлено тело, а также формой и размерами тела. В большинстве технических приложений (расчеты сооружений, машин и т.д.) подбираются обычно такие материалы и размеры, чтобы закон Гука оставался в силе.

В случае растяжения стержня, один конец которого закреплен, силой F , приложенной вдоль стержня к другому его концу, закон Гука имеет вид

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{S}, \quad (1)$$

где l - первоначальная длина стержня, Δl - величина деформации (абсолютное удлинение), $\frac{\Delta l}{l}$ - относительное удлинение, S - одинаковая по всей длине стержня площадь его поперечного сечения. Коэффициент пропорциональности α называется *коэффициентом растяжения*. На практике обычно используется обратная величина этого коэффициента $E = \frac{1}{\alpha}$, которая носит название *модуля Юнга*.

Модуль Юнга является характеристикой поведения вещества при растяжении (или сжатии). Он численно равен силе, растягивающей вдвое по сравнению с первоначальной длиной, стержень с единичным поперечным сечением. Однако, на самом деле при таких больших относительных

деформациях закон Гука не соблюдается (либо твердые тела разрушаются при значительно меньших деформациях, либо возникают пластические деформации). Поэтому на практике деформации измеряются при сравнительно малых внешних силах, а затем модуль Юнга вычисляется при помощи формулы, найденной теоретическим путем для данной деформации. В этой задаче модуль Юнга находится из *изгиба равнопрочной балки*.

Модуль Юнга измеряют в ньютонах на кв. метр (H/m^2) или в килограммах силы на кв. миллиметр ($кГ/мм^2$).

2. Изгиб равнопрочной балки.

Равнопрочной называется балка, имеющая сверху вид равнобедренного треугольника ABC (рис. 1). Балка закрепляется горизонтально у основания BC этого треугольника, к вершине же его A прикладывается нагрузка - сила,

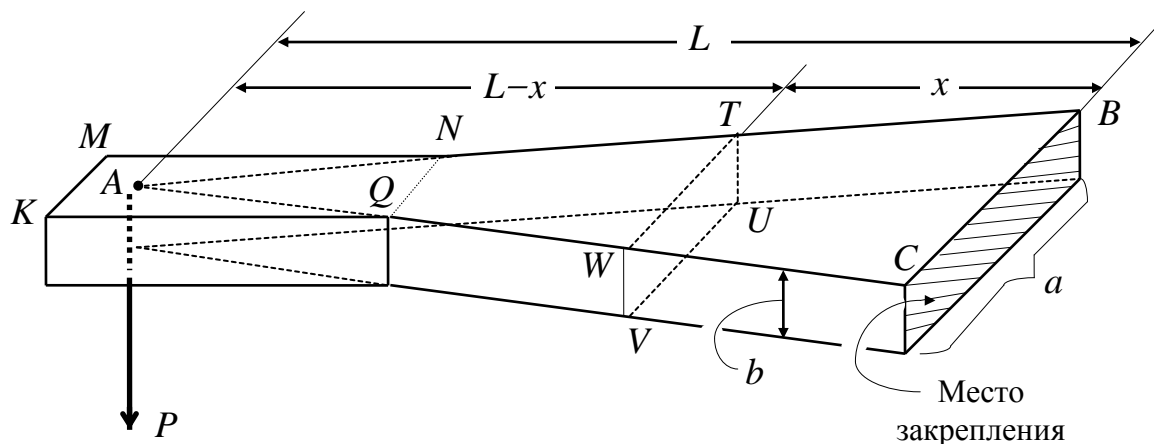


Рис.1

действующая вертикально вниз (например, подвешивается груз весом P). Смысл названия «равнопрочная балка» будет виден из дальнейшего.

В нашем случае для удобства подвеса нагрузки конец балки имеет

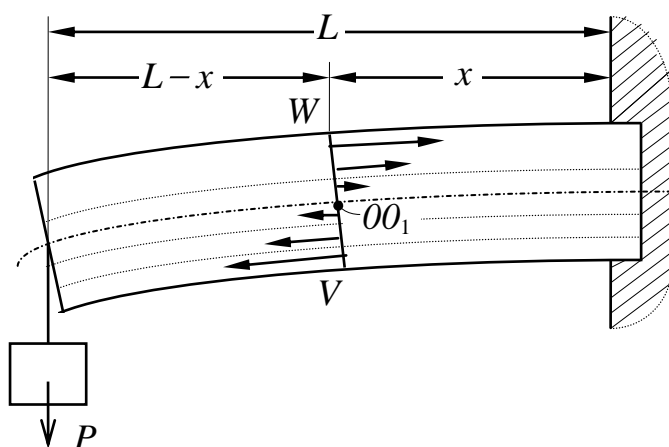


Рис.2

сверху вид прямоугольника $KMNQ$. Поэтому следует заранее оговориться, что наш расчет будет верен только для участка балки $QNBC$, имеющего вид трапеции. На этом участке и должны производиться все измерения (стрелы прогиба и толщины балки). Теоретический вид балки на рис.1 показан штриховыми линиями.

Изгиб представляет собой

растяжение верхних и сжатие нижних слоев балки. Слой, лежащий по середине балки, не меняет своей длины и называется нейтральным. По закону Гука напряжение внутри каждого слоя (отношение силы, растягивающей слой, к площади поперечного сечения этого слоя) пропорционально деформации. Так как верхние и нижние слои растягиваются и сжимаются больше, чем слои, лежащие ближе к середине, то и напряжения в них получаются больше. Выбрав сечение $VWTU$, находящееся на расстоянии x от закрепленного конца балки, изобразим стрелками величину и направление напряжений, действующих на часть балки, расположенную слева от сечения $VWTU$, со стороны части балки, прилегающей к этому сечению справа (рис.2; на рисунке балка изображена сбоку). Мы видим, что на левую часть балки, отделенную

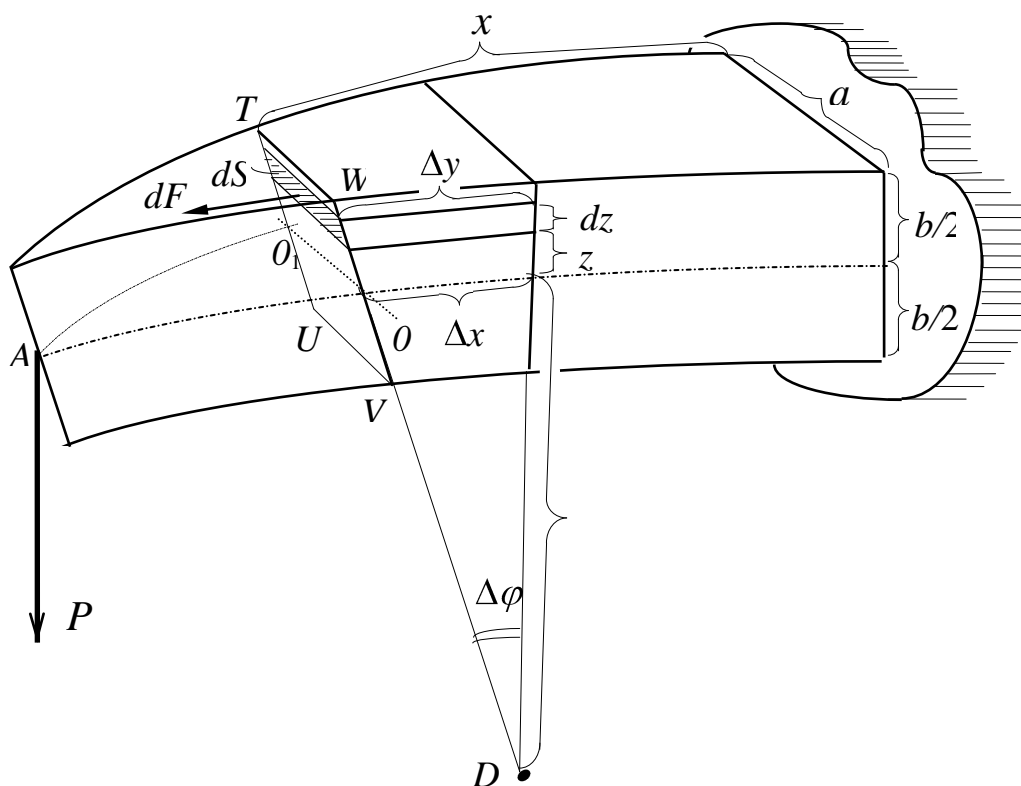


Рис.3

сечением $VWTU$, со стороны правой части балки действует момент внутренних сил.

Для этого проведем на небольшом расстоянии Δx справа от сечения $VWTU$ второе сечение, которое до изгиба было параллельно сечению $VWTU$, а после изгиба образовал с ним некоторый небольшой угол $\Delta\phi$ (рис.3). На достаточно малом отрезке любую кривую линию можно заменить дугой окружности. Поэтому мы примем нейтральный слой на отрезке Δx за дугу окружности некоторого радиуса R с центром в точке D .

Рассмотрим слой GH очень малой толщины dz , лежащий выше нейтрального слоя на расстоянии z и имеющий (после изгиба) длину Δy . Радиус его кривизны будет, очевидно, равен $R + z$. Так как длина дуги равна произведению радиуса на величину центрального угла (в радианах), то $\Delta x = R\Delta\varphi$ и $\Delta y = (R + z)\Delta\varphi$. Так как до изгиба длина слоя GH была равна Δx , то абсолютное удлинение этого слоя

$$\Delta l = \Delta y - \Delta x = (R+z)\Delta\varphi - R\Delta\varphi = z\Delta\varphi \quad (2)$$

и его относительное удлинение

$$\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{z\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{z}{R}. \quad (3)$$

Наш растянутый слой GH действует на левую часть балки с силой, которая по третьему закону Ньютона равна силе, вызывающей его растяжение. Пусть величина этой силы dF , а площадь поперечного сечения слоя dS , тогда из выражения (1) для закона Гука, заменив относительное удлинение $\Delta l/l$ его значением (3), найдем

$$dF = \frac{Ez}{R} dS. \quad (4)$$

Чтобы найти площадь поперечного сечения слоя GH , рассмотрим подобные треугольники ABC и ATW (рис. 1). Легко видеть, что

$$\frac{TW}{BC} = \frac{L-x}{L},$$

где L - длина балки от места закрепления до точки приложения нагрузки. Учитывая, что $BC = a$ - ширина балки в месте закрепления, получим отсюда

$$TW = \frac{(L-x)a}{L}.$$

Так как площадь поперечного сечения dS слоя GH равна произведению его ширины TW на высоту dz , то

$$dS = \frac{(L-x)a}{L} dz. \quad (5)$$

Следует заметить, что изменением ширины слоя GH на расстоянии Δx мы пренебрегаем ввиду малости последнего.

Подставив в формулу (4) выражение (5), найдем силу dF , растягивающую слой GH :

$$dF = \frac{aE(L-x)}{RL} z dz. \quad (6)$$

Плечом силы dF относительно оси 00_1 является расстояние z от нейтрального слоя до слоя GH . Следовательно, моментом силы относительно оси 00_1 будет величина

$$dM = z dF = \frac{aE(L-x)}{RL} z^2 dz. \quad (7)$$

Для получения полного момента M всех сил, действующих на сечение $VWTU$, надо сложить элементарные моменты dM , которые возникают при растяжении и сжатии слоев, лежащих на всевозможных расстояниях z от нейтрального слоя в пределах толщины балки b . С точки зрения математики такое сложение представляет собой интегрирование dM по z в пределах от $-b/2$ (значение z , для нижней плоскости балки) до $+b/2$ (значение z для верхней плоскости балки):

$$\begin{aligned} M &= \int_{-b/2}^{+b/2} dM = \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{aE(L-x)}{RL} z^2 dz = \frac{aE(L-x)}{RL} \int_{-b/2}^{+b/2} z^2 dz = \frac{aE(L-x)}{RL} \frac{z^3}{3} \Big|_{-b/2}^{+b/2} = \\ &= \frac{aE(L-x)}{RL} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{b^3}{24} \right) = \frac{Eab^3(L-x)}{12RL}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подвешенный к концу балки груз весом P также создает относительно оси 00_1 момент силы M_P , действующий на левую часть балки, но, в отличие от момента M , не по часовой стрелке, а против нее (см. рис. 2). Плечом момента M_P будет расстояние $L - x$ от точки подвеса груза конца балки до сечения $VWTU$, а величиной его

$$M_P = (L - x)P. \quad (9)$$

Под действием груза P конец балки начинает опускаться, балка изгибается, и сечение $VWTU$ поворачивается. При повороте сечения $VWTU$ правой части балки при растяжении и сжатии слоев возникают упругие напряжения, которые создают уже вычисленный нами момент сил M , действующий на левую часть балки относительно оси 00_1 . По мере изгиба балки сечение $VWTU$ поворачивается все больше и больше, и момент сил M возрастает, поскольку растяжение и сжатие слоев балки увеличивается. В статическом случае, когда начавшееся после подвеса груза движение конца балки прекратилось, должно быть выполнено равенство $M = M_P$, или, согласно (8) и (9),

$$\frac{Eab^3(L-x)}{12RL} = (L-x)P. \quad (10)$$

После сокращения на $L - x$, находим радиус R изгиба участка нейтрального слоя Δx вблизи сечения $VWTU$

$$R = \frac{Eab^3}{12PL}. \quad (11)$$

Оказывается, радиус дуги, по которой изгибается отрезок Δx , не зависит от x . Следовательно, этот радиус одинаков для всех участков балки, так как сечение $VWTU$ было выбрано произвольно. Линия, радиус кривизны которой одинаков для всех ее участков, является окружностью. Значит, наша балка изгибается по

дуге окружности. Таким образом, для балки, имеющей сверху вид равнобедренного треугольника, относительные удлинения любых отрезков GH , лежащих на одинаковых расстояниях z от нейтрального слоя, равны, так как и z , и R , входящие в формулу (3), постоянны. Поэтому и внутренние напряжения, возникающие при изгибе балки внутри слоя с данным значением z , будут одинаковы по всей длине балки. В этом смысле балка и называется «равнопрочной».

3. Связь стрелы прогиба с модулем Юнга.

На практике деформация изгиба характеризуется так называемой стрелой прогиба балки, т.е. величиной y , на которую опускается при изгибе некоторая точка балки, лежащая на расстоянии x от места закрепления (рис.4).

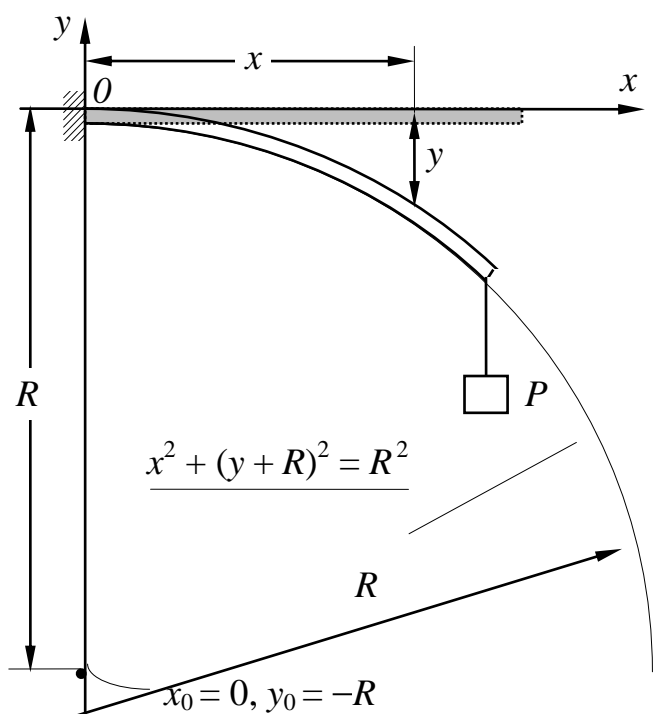


Рис.4

Между стрелой прогиба и радиусом кривизны изогнутой балки, а следовательно, и между стрелой прогиба и модулем Юнга, имеется связь, установлением которой мы сейчас и займемся.

Возьмем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с местом закрепления балки, ось x направлена горизонтально вдоль балки, а ось y - вертикально вверх (рис.4). Положение недеформированной балки на рисунке показано пунктиром. Центр окружности, по которой изогнута балка, при таком расположении системы координат будет лежать на оси y на расстоянии R вниз от начала координат.

Его координатами будут $x = 0$, $y = -R$. Как известно из аналитической геометрии, уравнение окружности с произвольно расположенным центром, координаты которого x_0 , y_0 , имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Подставляя сюда координаты нашего центра, получим

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2. \quad (12)$$

Уравнение (12) связывает между собой значения x , y и R . Раскрыв скобки, найдем

$$x^2 + 2Ry + y^2 = 0.$$

В этом уравнении величиной y^2 можно пренебречь по сравнению с остальными членами, так как стрела прогиба y обычно очень мала (несколько миллиметров) по сравнению с радиусом кривизны R (несколько десятков метров) и расстоянием x (несколько десятков сантиметров). Тогда получится

$$x^2 + 2Ry = 0.$$

Отсюда находим

$$R = \left| -\frac{x^2}{2y} \right|. \quad (13)$$

Подразумевая в дальнейшем под y модуль стрелы прогиба, найдем, приравняв выражения (11) и (13), формулу для зависимости модуля Юнга от величин, которые легко измерить на опыте,

$$E = \frac{6Lx^2}{ab^3} \cdot \frac{P}{y}. \quad (14)$$

ИЗМЕРЕНИЯ

Приборы и принадлежности: станина, балка, подвес для грузов, грузы, линейка, штангенциркуль, индикатор

Устройство прибора, при помощи которого модуль Юнга измеряется из изгиба равнопрочной балки, показано на рис. 5. На этом рисунке: 1 - станина, 2 - балка, 3 - стойка, 4 - винт, закрепляющий стойку на станине, 5 - винт, для установки высоты стойки, 6 - винт, закрепляющий индикатор, 7 - индикатор, 8 - кольцо индикатора, 9 - хомут с площадкой для подвески грузов, 10 - груз.

При измерениях следует придерживаться указанного ниже порядка.

1. Измеряют штангенциркулем с точностью до 0,1 мм толщину балки по крайней мере в пяти местах на участке $QNBC$ (см. рис. 1).

Находят среднее значение толщины балки b .

2. Измеряют линейкой с точностью до 1 мм расстояние L от места закрепления балки до точки приложения нагрузки (она отмечена чертой вблизи конца балки). Измеряют штангенциркулем с точностью до 0,1 мм ширину балки a в месте закрепления.

3. Измерение стрелы прогиба y производится с точностью до 0,01 мм индикатором. *Винтом* 4 закрепляют *стойку* 3 примерно в 35 см от места закрепления балки. Освободив предварительно на стойке 3 *винт* 5. так, чтобы ее верхняя часть могла свободно перемещаться, закрепляют в стойке при помощи *винта* 6 индикатор. Затем, поворачивая и осторожно опуская верхнюю

часть стойки, ножку индикатора ставят на балку. При соприкосновения ножки индикатора с балкой стрелки его начинают вращаться. Нажимая на индикатор, следят за стрелками и закрепляют верхнюю часть стойки *винтом 5* после того, как маленькая стрелка, сделав полный оборот, станет указывать на черную цифру 10 (или красный нуль)¹. Затем поворотом *кольца 8* устанавливают нуль шкалы индикатора против большой стрелки.

Нажимая на свободный конец балки, проверяют работу индикатора. Стрелки его при этом должны перемещаться в сторону увеличения красных цифр, поэтому и отсчет по индикатору ведется по красным цифрам, Маленькая стрелка показывает число целых миллиметров, а большая - число сотых долей миллиметра стрелы прогиба u .

4. Измеряют линейкой с точностью до 1 мм расстояние x между местом

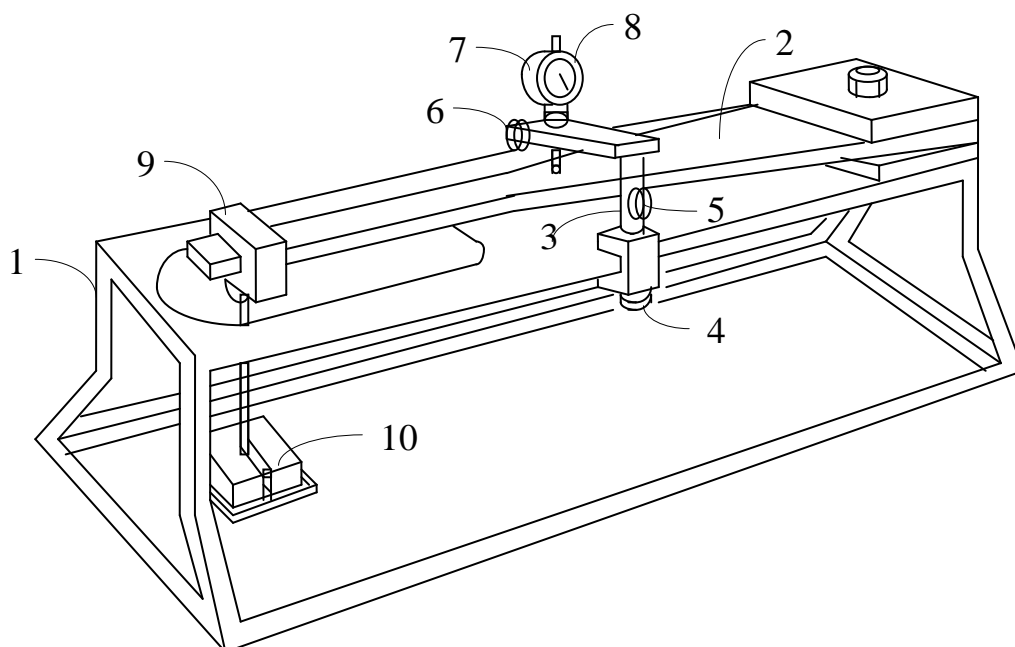


Рис.5

закрепления балки и ножкой индикатора.

5. Устанавливают *хомут 9* для подвеса груза так, чтобы его середина находилась над чертой, до которой измеряли длину балки.

Результаты измерений удобно записывать в прилагаемой ниже таблице.

6. Осторожно помещая на площадку подвеса один из грузов, записывают в первую строку таблицы его вес (величина массы указана на грузе) и показания индикатора. Затем на этот груз помещают второй груз и записывают во вторую строку таблицы суммарный вес двух грузов и новые показания индикатора. Кладут третий, а затем четвертый грузы, каждый раз производя те

¹ У некоторых индикаторов шкала маленькой стрелки содержит только пять делений, в этом случае индикатор закрепляется так, чтобы маленькая стрелка показывала на цифру 5.

же записи.

7. Снимая грузы по одному, снова каждый раз записывают показания индикатора. Если при нагрузке и разгрузке для одного и того же общего веса грузов получаются разные показания индикатора, то берут среднее между ними.

8. Используя данные двух последних столбцов таблицы, находят средние значения отношения P/y и абсолютной ошибки этого отношения $\Delta(P/y)$. Модуль Юнга вычисляют по формуле (14), подставляя в нее средние значения отношения P/y и всех остальных измеренных величин. Далее общим методом вычисляют значения абсолютной и относительной ошибок в величине модуля Юнга.

9. Приподняв рукой ножку индикатора, освобождают *винт* 4 и передвигают стойку 3 на 8-10 см ближе к месту закрепления балки. Производят еще раз установку индикатора, как это указано в пункте 3, и все измерения, описанные в пунктах 4-7. Результаты заносят в таблицу 2, аналогичную таблице 1.

10. Находят среднее значение результатов измерения модуля Юнга по двум таблицам.

Окончательный результат приводят в системе единиц СИ.

Таблица 1

x, мм	Суммарный вес грузов P , Н	Стрела прогиба y , мм			Радиус $R = x^2/2y$, м	P/y , Н/м	$\Delta(P/y)$, Н/мм
		При на- грузке	При раз- грузке	Средняя			

Вопросы для самопроверки

1. Какие деформации называются упругими?
2. Какие виды деформаций относятся к простым деформациям и какие к сложным?
3. Как определяются относительное удлинение и напряжение при деформациях сжатия и растяжения?
4. Какую связь между ними устанавливает закон Гука?
5. Объяснить, почему модуль Юнга можно определить из изгиба.
6. Почему исследуемая в данной работе балка называется равнопрочной?

ЛИТЕРАТУРА

Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ
им. М.В.Ломоносова 1998,
глава V – Упругие деформации в твердых телах.