

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**имени М. В. Ломоносова**

---

**Физический факультет**

**кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Методическая разработка**

**по общему физическому практикуму**

**Лаб. работа № 10**

**ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА  
ОБЕРБЕКА**

**Описание составили**

**профессор Андреев А.С. и доцент Белов Д.В.**

**Москва - 2012**

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

# ПРОВЕРКА ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**Цель работы:** экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения - уравнения моментов.

## ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

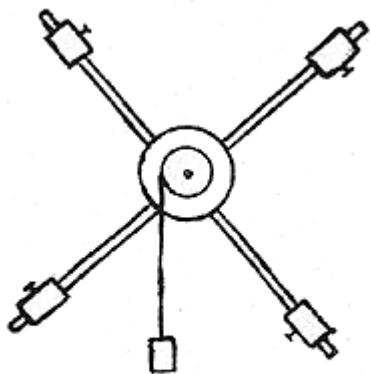


Рис.1

Прибор - маятник Обербека - состоит из четырех стержней и шкивов различных радиусов и может вращаться относительно горизонтальной оси (рис.1). На стержни насажены одинаковые грузы цилиндрической формы, которые можно перемещать и закреплять в нужном положении при помощи винтов. Если на конце нити, намотанной на один из шкивов, укрепить груз, то под действием силы тяжести последний начнет опускаться, приводя маятник во вращение.

Чтобы определить, как будет двигаться система "груз-маятник", необходимо написать уравнения движения: второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось для поступательного движения груза и уравнение моментов относительно оси вращения - для вращательного движения маятника.

На груз действуют (при пренебрежении силами трения) сила тяжести  $mg$ , где  $m$  - масса груза и  $g$  - ускорение свободного падения, и сила натяжения нити  $T$  (рис.2), так что уравнение движения груза имеет вид

$$ma = mg - T, \quad (1)$$

где  $a$  - ускорение груза.

Из моментов сил, действующих на маятник, отличен от нуля лишь момент силы натяжения нити  $M = RT$ , где  $R$  - радиус шкива. Действительно, моменты силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы реакции оси  $\vec{N}$ , на которую насажен маятник, равны нулю, так как эти силы направлены радиально от оси вращения; всеми же силами трения мы в этой задаче пренебрегаем. Следовательно, уравнение движения маятника имеет вид

$$J\beta = RT, \quad (2)$$

где  $J$  - момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\beta$  - угловое ускорение маятника.

Ускорения груза и маятника связаны

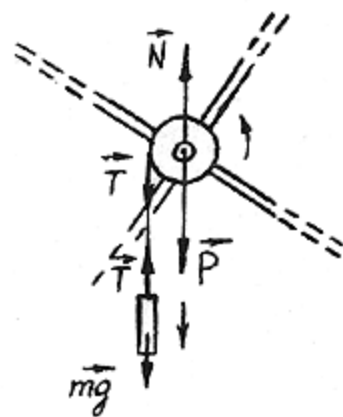


Рис.2

соотношением

$$a = \beta R. \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) составляют систему уравнений для определения трех неизвестных величин:  $a$ ,  $\beta$  и  $T$

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ J\beta &= RT \\ a &= \beta R. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая из этих уравнений  $\beta$  и  $T$ , находим ускорение:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{J}{mR^2}}, \quad (5)$$

которое, как видно из этой формулы, постоянно. По известной формуле равноускоренного движения ( $h = at^2/2$ ) это ускорение можно выразить через путь груза  $h$  и время движения  $t$

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (6)$$

Приравняв правые части выражений (5) и (6), получим следующую формулу для момента инерции маятника

$$J = \frac{1}{4}mD^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (7)$$

где вместо радиуса шкива введен его диаметр  $D = 2R$ .

### Выведем два следствия из формулы (7)

**Первое следствие.** Пусть в двух опытах груз, опускаясь, проходит один и тот же путь  $h$ , причем *моменты сил различны* (в первом опыте берется груз массы  $m_1$  и нить наматывается на шкив диаметром  $D_1$ , а во втором опыте используются другой груз, массой  $m_2$ , и другой шкив, диаметром  $D_2$ ), а *моменты инерции одинаковы* (положение цилиндров на стержнях маятников остается неизменным). Обозначая через  $t_1$  и  $t_2$  время падения груза, соответственно в первом и втором опытах, из формулы (7) имеем

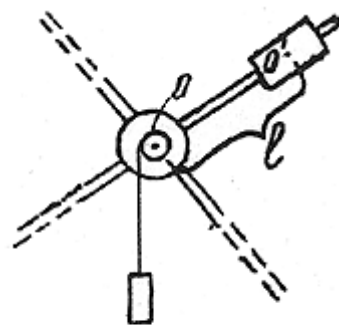


Рис.3

$$m_1 D_1^2 \left( \frac{g t_1^2}{2h} - 1 \right) = m_2 D_2^2 \left( \frac{g t_2^2}{2h} - 1 \right). \quad (8)$$

**Второе следствие.** Пусть теперь в двух опытах *моменты сил одинаковы* (в обоих случаях используется один и тот же груз массы  $m$  и шкив диаметром  $D$ ), а *моменты инерции различны* (в первом опыте цилиндры на стержнях располагаются на расстоянии  $l_1$ , а во втором опыте - на расстоянии  $l_2$  от оси вращения).

Момент инерции маятника  $J$  складывается из момента инерции  $J_M$  маятника без цилиндров и из четырех одинаковых моментов инерции  $J_u$  каждого цилиндра относительно оси вращения

$$J = J_M + 4J_u. \quad (9)$$

По теореме Штейнера момент инерции  $J_u$  цилиндра относительно оси вращения (на рис.3 ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа и изображается точкой  $O$ ) может быть представлен в вид

$$J_u = J_{ou} + m_u l^2, \quad (10)$$

где  $J_{ou}$  - момент инерции цилиндра относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс (на рис. 3 эта ось изображается точкой  $O'$ ),  $l = OO'$  - расстояние между обеими осями,  $m_u$  - масса цилиндра. С учетом (10) формула (9) дает

$$J = J_M + 4J_{ou} + 4m_u l^2.$$

Подставляя это выражение в формулу (7), имеем для первого опыта ( $l = l_1$ ,  $t = t_1$ ) и для второго опыта ( $l = l_2$ ,  $t = t_2$ )

$$J = J_M + 4J_{ou} + 4m_u l_1^2 = \frac{mD^2}{4} \left( \frac{g t_1^2}{2h} - 1 \right) \quad (11)$$

$$J = J_M + 4J_{ou} + 4m_u l_2^2 = \frac{mD^2}{4} \left( \frac{g t_2^2}{2h} - 1 \right).$$

Вычитая второе равенство из первого, найдем

$$4m_u (l_1^2 - l_2^2) = \frac{mgD^2 (t_1^2 - t_2^2)}{8h},$$

откуда

$$t_1^2 - t_2^2 = \frac{32hm_y(l_1^2 - l_2^2)}{mgD^2}. \quad (12)$$

Экспериментальная проверка формул (8) и (12) и является целью задачи.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

**Описание прибора:** На вертикальной колонне 2 (см. рис.1) прикреплены два кронштейна: нижний неподвижный 1 и верхний подвижный 6 и две неподвижные втулки 3 и 7. Через верхний диск 11 перекидывается нить 5, один конец которой прикреплен к двухступенчатому диску 8. Второй конец нити привязан к платформе 10. Для увеличения натяжения нити на платформу можно положить два грузика, примерно равной массы. На одной оси с диском находится крестовина маятника. И диск, и крестовина жестко связаны между собой. На нижнем кронштейне 3 установлен тормоз (электромагнит с сердечником 4), который может удерживать

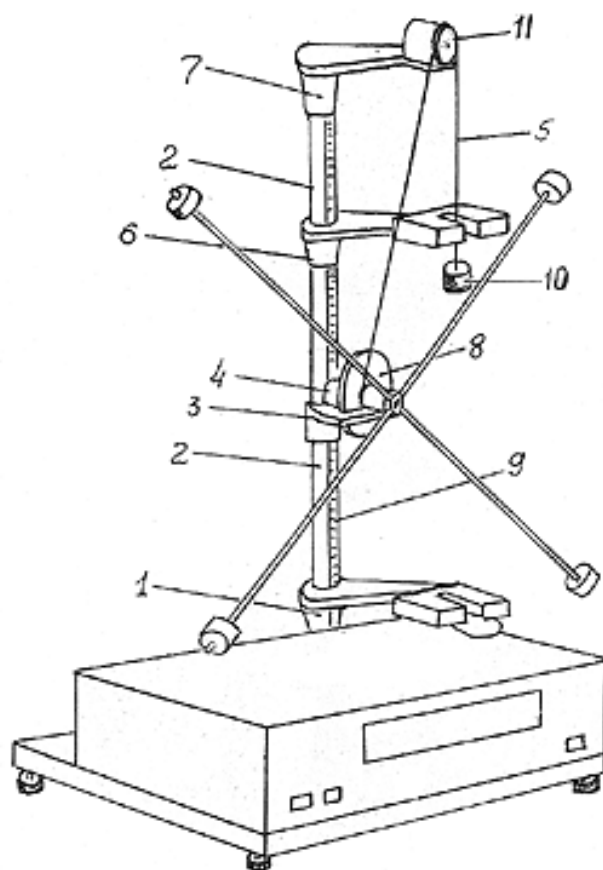


Рис.1

крестовину с платформой 10 в состоянии покоя. На колонне 2 нанесена миллиметровая шкала 9. На кронштейнах 6 и 1 закреплены фотоэлектрические датчики. Верхний датчик срабатывает в момент пересечения грузом луча света датчика и запускает электронный секундомер, в то время как нижний при тех же обстоятельствах останавливает секундомер. Таким образом, показание электронного секундомера определяет время прохождения грузом 10 расстояния между датчиками.

На лицевой панели секундомера расположены следующие элементы управления.

1. Клавиша *СЕТЬ* – нажатие на клавишу включает напряжение питания (все индикаторы высвечивают цифру "0" и светятся лампочки фотоэлектрических датчиков).
2. Клавиша *СБРОС* – нажатие на клавишу приводит к сбросу предыдущего

показания.

3. Клавиша *ПУСК* - нажатие на клавишу вызывает отключение электромагнита и приводит в движение механическую систему.

## Упражнение 1

В этом упражнении проверяется первое следствие формулы для нахождения момента инерции маятника Обербека, т.е. формула (8).

Необходимо знать величины  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $h$ ,  $t_1$  и  $t_2$ , где:

$m_1$  – масса платформы, привязанной к нитке,  $m_1 = 53$  г.

$m_2$  – масса, равная массе  $m_1$  плюс массы двух дополнительных грузиков. Массы дополнительных грузиков определяют взвешиванием на электронных весах;

$D_1 = 42$  мм;  $D_2 = 84$  мм;  $h = 40$  см;  $t_1$  и  $t_2$  измеряются в процессе эксперимента.

Прежде, чем приступить к измерениям, располагают подвижные цилиндры на крестовине вблизи удаленных от оси вращения концов стержней на равных расстояниях от оси маятника. При этом необходимо добиться того, чтобы при ненатянутой нити любое положение маятника являлось положением безразличного равновесия.

## Измерения.

1. Включить прибор в сеть.
2. Закрепить нить узелком на щеке шкива  $R_1$ .
3. Подвесить груз  $m_1$ .
4. Наматывая нить на шкив  $R_1$ , установить нижний край груза точно на уровне черты на корпусе верхнего фотоэлектрического датчика.
5. Нажав кнопку *СЕТЬ*, зафиксировать магнитом груз в этом положении.
6. Нажать кнопку *ПУСК*.
7. Записать значение  $t_1$ , высветившееся на дисплее секундомера.
8. Нажать кнопку *СБРОС*.
9. Повторно поднять груз до верхней черты, где зафиксировать его, отпустив кнопку *ПУСК*.
10. Повторить измерения десять раз.
11. Прodelать то же самое для шкива радиуса  $R_2$  и массы  $m_2$ .

Подставляя измеренные значения в формулу (8), вычисляют ее левую и правую части.

## Упражнение 2

В этом упражнении проверяется формула (12). Для этого необходимо измерить расстояния  $l_1$  и  $l_2$  и соответствующие значения времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Перед выполнением измерений на платформу укладывают два грузика. Не изменяя расположения цилиндров на крестовине, которое было установлено

при выполнении упражнения 1, определяют на основании трех измерений среднее расстояние  $l_1$  от центра масс цилиндра до оси вращения. Для измерения расстояния  $l_1$  используют линейку с миллиметровой шкалой. Измеряют десять раз время движения  $t_1$  платформы между фотодатчиками.

Вторую серию из пяти опытов проводят при новом расстоянии  $l_2$  цилиндров от оси вращения ( $l_2 < l_1$ ). Добившись положения безразличного равновесия при новом расположении цилиндров, определяют точно так же, как в предыдущем случае расстояние  $l_2$  и время движения  $t_2$ .

После выполнения упражнения цилиндры с винтами снимают с крестовины и взвешивают на электронных весах. Подставляя измеренные значения величин  $l_i$ ,  $t_i$ , среднее значение массы цилиндра с винтом  $m_{ц}$  и массу платформы с двумя грузиками в формулу (12), вычисляют ее левую и правые части и сравнивают результаты.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение момента инерции мат. точки и твердого тела конечных размеров относительно оси. В каком случае тело можно считать мат. точкой?
2. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера о параллельных осях. Относительно какой оси (из всевозможных осей заданного направления) момент инерции тела минимален?
3. Запишите и прокомментируйте уравнение моментов (уравнение вращательного движения твердого тела относительно оси); поясните, как из него вытекает физический смысл момента инерции. Дайте определение момента силы относительно оси.
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Объясните, почему он выполняется в условиях данной задачи.
5. Выведите расчетную формулу для момента инерции платформы. Чем следует заменить массу платформы в этой формуле, если при проведении опыта на платформе находятся тела?
6. Дайте определение угловой скорости и углового ускорения.
7. Напишите формулу гармонического колебания и дайте определения его характеристикам (период, частота, круговая (циклическая) частота, амплитуда, фаза).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В. «Механика», изд. Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова 1998, глава IV – Движение абсолютно твердого



тела, §§ 17 -19 (до стр. 71).

2. Савельев И.В. «Курс физики», т.1, М. Наука, 1989, §§ 26, 27, 31, 32.

3. Савельев И. В. «Курс общей физики» в 5-и книгах.

Книга I «Механика», 1998 г.,

гл. 5, Механика твердого тела,

§ 5.3 Вращение тела вокруг неподвижной оси,

§5.4 Момент инерции.